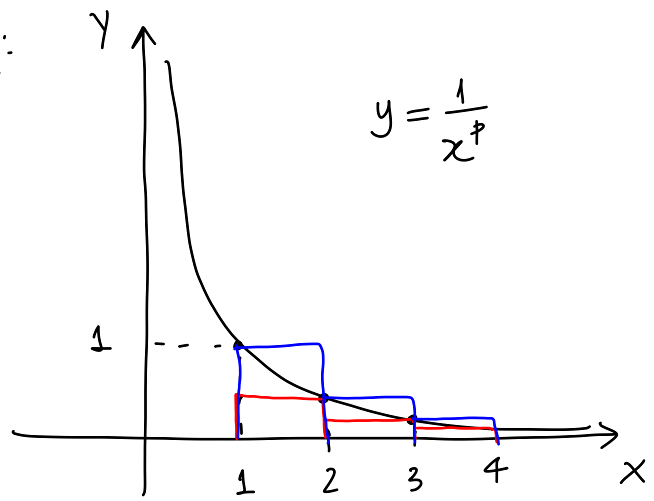
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

teste integral (livro)

$p > 0$:



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{converge se } p > 1$$

Soma das áreas dos retângulos coincide com a soma da série.

Testes de convergência

série alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n$, com $y_n \geq 0$.

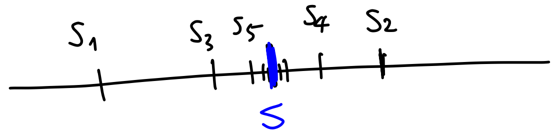
Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$

Teste da série alternada: Dada uma série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n$. Se a série satisfaz:

i) $y_{n+1} \leq y_n$ (decrescente) $\left(\frac{y_{n+1}}{y_n} \leq 1 \text{ ou } y_{n+1} - y_n \leq 0 \right)$

ii) $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

então a série é convergente.



Exemplos: 1) (Harmônico alternado) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \overset{y_n}{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$

i) $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \cdot n = \frac{n}{n+1} \leq 1 \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n$

ii) $\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Pelo teste da série alternada, a série harmônica alternada é convergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ y_n

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{4n-1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}_{=1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{4} \neq 0$$

O teste da série alternada é inconclusivo. Mas

$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ não existe, pois

n é par: $\frac{(-1)^n 3n}{4n-1} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3}{4}$

n é ímpar: $\frac{(-1)^n 3n}{4n-1} \xrightarrow{n \to \infty} -\frac{3}{4}$

Portanto, pelo teste da divergência, a série é divergente.

Teste da razão: Dado $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \begin{cases} < 1, & \text{então a série converge} \\ > 1 \text{ ou não existe}, & \text{então a série diverge} \\ = 1, & \text{o teste é inconclusivo.} \end{cases}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $(p=2>1)$, mas $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right|^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right|^2 = 1$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, mas $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| = 1.$$

Exemplos: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{(-1)^n\cdot n^3}\right|$$

$$= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)^3}{n^3}\right| = \left|(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right| = |-1|\cdot\left|\frac{1}{3}\right|\cdot\left|\frac{n+1}{n}\right|^3$$

$$\overset{(n\geq 1)}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^3 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1$$

Portanto, a série é convergente.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ $\qquad n! = n\underbrace{(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{(n-1)!}$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right| = \left|\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right|$$

$$= \left|\frac{n!}{(n+1)n!}\cdot\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{n^n}\right| = \left|\frac{1}{\cancel{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cancel{(n+1)}\right| \overset{(n\geq 1)}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e > 1 \quad \therefore \text{ a série diverge.}$$

<u>Teste da raiz</u>: Dado $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \begin{cases} < 1, & \text{então a série converge} \\ > 1 \text{ ou não existe}, & \text{então a série diverge} \\ = 1, & \text{o teste é inconclusivo.} \end{cases}$$

<u>Observação</u>: Sempre que o teste da razão for inconclusivo, o teste da raiz também será inconclusivo e vice-versa.

<u>Exemplo</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{2n+3}{3n+2}\right|^n} = \left|\frac{2n+3}{3n+2}\right| \overset{(n\geq 1)}{=} \frac{2n+3}{3n+2}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2}{3} < 1 \quad \therefore \text{ a série é convergente.}$$